11　無限級数

基本問題 & 解法のポイント

17

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

18

(1)

$$2-x+(2-x)\cdot\frac{2-x}{x}=(2-x)\left(\frac{2-x}{x}\right)^2+\cdots+(2-x)\left(\frac{2-x}{x}\right)^{n-1}+\cdots$$ より，

収束条件は

$2-x=0$　すなわち　$x=2$・・・①

または

$\left|\frac{2-x}{x}\right|<1$　すなわち $|2-x|<|x|$ より，$-x<2-x<x$　$\therefore x>1$　・・・②

①，②より，$x>1$

補足

$$\left|\frac{2-x}{x}\right|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{x}-1\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{2}{x}-1<1 \Leftrightarrow 0<\frac{2}{x}<2 \quad \therefore x>1$$

(2)

求める初項を a，公比を r とすると，

条件より，

$\frac{a}{1-r}=6$　すなわち $a=6(1-r)$（$r\neq 1$）

かつ

$\frac{a^2}{1-r^2}=12$　すなわち $a^2=12(1-r^2)$（$r\neq\pm 1$）

よって，$\begin{cases}a=6(1-r)\\ a^2=12(1-r^2)\end{cases}$　（$r\neq\pm 1$）

これを解くことにより，$a=3,\ r=\frac{1}{2}$

A

68

(1)

与式 $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)\left(\sqrt{n(n+1)}+n\right)}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ すなわち与式は発散する。

(2)

第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ だから，追い出しの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$　よって，無限級数は発散する。

(3)

第 n 項までの和を S_n とすると，

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+4)}\\&=1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+4}\right)\\&=1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\\&=\frac{73}{48}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\frac{73}{48}$　よって，$\dfrac{73}{48}$ に収束する。

69

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leq 4nx \leq 2n\pi$

このとき，$\sin 4nx \geq \sin x$ ならば $x + 2k\pi \leq 4nx \leq \pi - x + 2k\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ が成り立つ。
逆に，$x + 2k\pi \leq 4nx \leq (\pi - x) + 2k\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ ならば $\sin 4nx \geq \sin x$ が成り立つ。
したがって，$x + 2k\pi \leq 4nx \leq (\pi - x) + 2k\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ は $\sin 4nx \geq \sin x$ であるための必要十分条件である。
よって，$\sin 4nx \geq \sin x$ の解は，$x + 2k\pi \leq 4nx \leq (\pi - x) + 2k\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ を解くことにより，$\dfrac{2k}{4n-1}\pi \leq x \leq \dfrac{2k+1}{4n+1}\pi \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

$$\begin{aligned}
\therefore S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{4n+1}\pi - \frac{2k}{4n-1}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{16n^2-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-4k+4n-1) \\
&= \frac{\pi}{16n^2-1}\left\{4n-1-(-1)+\sum_{k=1}^{n}(-4k+4n-1)\right\} \\
&= \frac{\pi}{16n^2-1}\{4n-2n(n+1)+n(4n-1)\} \\
&= \frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi
\end{aligned}$$

ゆえに，

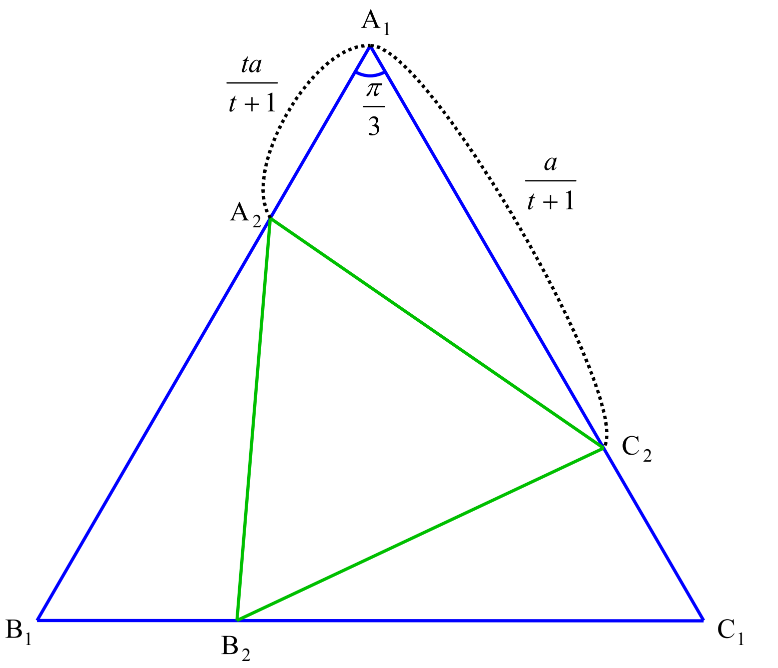
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{16-\dfrac{1}{n^2}}\pi \\
&= \frac{1}{8}\pi
\end{aligned}$$

70

(1)

$$\mathrm{C_2A_2} = \sqrt{\mathrm{A_1A_2}^2 + \mathrm{C_2A_1}^2 - 2\mathrm{A_1A_2}\cdot\mathrm{C_2A_1}\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{ta}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{t+1}\right)^2 - 2\cdot\frac{ta}{t+1}\cdot\frac{a}{t+1}\cdot\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}\cdot a$$

よって，T_2 の 1 辺の長さは $\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}\cdot a$



(2)

T_n の 1 辺の長さを a_n とすると，(1)と同様にして，$a_{n+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}a_n$

これと $a_1 = a$ より，$a_n = a\left(\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}\right)^{n-1}$

ゆえに，$T_n = \frac{1}{2}{a_n}^2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\left\{\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\right\}^{n-1}$

また，$T_{n+1} < T_n$ より，$0 < \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} < 1$

よって,

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t}\cdot a^2
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t}\cdot a^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)
\end{aligned}
$$

ここで, $t>0$ だから, 相加平均≧相乗平均により, $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$

ただし, 等号成立は $t=\frac{1}{t}$ すなわち $t=1$ のとき

よって, $S(t)=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)\geq\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$ （等号成立は $t=1$ のとき）

ゆえに, $S(t)$ は $t=1$ で最小値 $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$ をとる。

B

71

$m=1,\ 2,\ 3,$ とすると，

$n=2m$ のとき

$$S_{2m}=\log\frac{3}{1}-\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}-\log\frac{6}{4}+\cdots+\log\frac{2m+1}{2m-1}-\log\frac{2m+2}{2m}$$
$$=\log\frac{3}{1}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{2m+1}{2m-1}-\left(\log\frac{4}{2}+\log\frac{6}{4}+\cdots+\log\frac{2m+2}{2m}\right)$$
$$=\log\frac{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2m-1)}-\log\frac{4\cdot6\cdot\cdots\cdot2m+2}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2m}$$
$$=\log(2m+1)-\log(m+1)$$
$$=\log\frac{2m+1}{m+1}$$
$$=\log\left(2-\frac{1}{m+1}\right)$$

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\log\left(2-\frac{1}{m+1}\right)=\log 2$$

$n=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-b_{2m}$$
$$=\log\frac{2m+1}{m+1}-\left(-\log\frac{2m+2}{2m}\right)$$
$$=\log\frac{2m+1}{m+1}+\log\frac{2m+2}{2m}$$
$$=\log\left(2-\frac{2}{m+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left\{\log\left(2-\frac{1}{m+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}=\log 2+\log 1=\log 2$$

以上より， $\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\log 2$ であるから， $\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

72

(1)

$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2=\theta$ とおくと，$\left|\overrightarrow{h_{k+1}}\right|=\left|\overrightarrow{h_k}\right|\cos\theta$ より，$\left|\overrightarrow{h_k}\right|=\left|\overrightarrow{h_1}\right|\cos^{n-1}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos^{n-1}\theta$

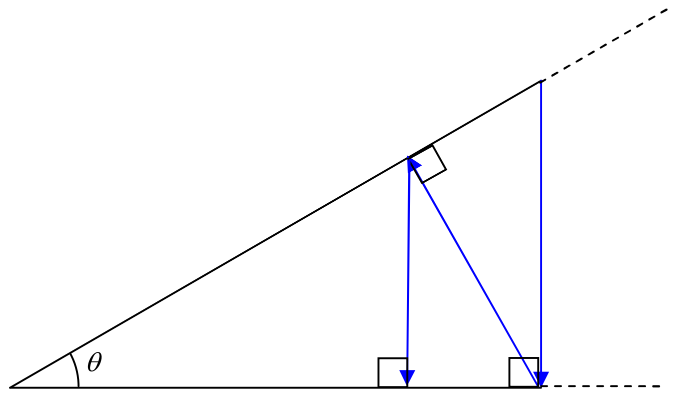
これと，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{OA}_2}{\mathrm{OA}_1}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ より，$\left|\overrightarrow{h_k}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

また，$\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ のなす角は $\pi-\theta$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}\cdot\cos(\pi-\theta)\\&=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{2k-1}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\&=-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\end{aligned}$$

参考図



(2)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}} \\
&= -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1} \\
&= -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
&= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right\} \\
&= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\right\} \\
&= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n}\right\} \\
&= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}\right\} \\
&= -\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= -1\cdot\left(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}\right) \\
&= \frac{1}{e}-1
\end{aligned}
$$